MSCPH-01

June - Examination 2019

MSc (Previous) Physics Examination

Mathematical Physics and Classical Mechanics

गणितीय भौतिकी तथा चिरसम्मत यांत्रिकी

Paper - MSCPH-01

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 80**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. Check your paper code and paper title before starting the paper. You are allowed to use a non-programmable calculator, however sharing of calculators is not allowed.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। प्रश्न पत्र शुरू करने से पूर्व पेपर कोड व प्रश्नपत्र शीर्षक जाँच ले। आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं, परन्तु केलकुलेटर के हस्तांतरण की अनुमति नही है।

Section - A **$8 \times 2 = 16$**

(Very Short Answer Questions)

Note: Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 2 marks.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

1) (i) Find the value of the poisson bracket $[\, p^4, q+2\,]$by writing all main steps.

सभी मुख्य पदों को लिखते हुए पोइसन ब्रेकिट $[\, p^4, q+2\,]$ का मान ज्ञात करो.

(ii) The Lagrangian of the particle is given by

$L = \frac{1}{2} m\,(\cos\theta\, l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\phi \sin^2\dot{\phi}^3)$

then find the generalized momentum p_ϕ

किसी कण का लेग्रेंजियन $L = \frac{1}{2} m\,(\cos\theta\, l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\phi \sin^2\dot{\phi}^3)$ जाता है तो, व्यापक संवेग p_ϕ ज्ञात करो।

(iii) A particle of mass m is moving under central force in a plane and it position is given by polar coordinates (r, θ) and its Lagrangian is given by $L = \frac{1}{2} m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$ Find the cyclic coordinate.

एक कण जिसका द्रव्यमान m है वह केंद्रीय बल के अंतर्गत एक तल में गति कर रहा है तथा इसकी स्थिति ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ)द्वारा दी जाती है तथा लेग्रेंजियन $L = \frac{1}{2} m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$ द्वारा दिया जाता है तो चक्रीय निर्देशांक ज्ञात करो।

(iv) Find the Laplace transform of $f(t) = \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{2}$

फलन $f(t) = \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{2}$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

(v) Find the Fourier transform of $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 6 & \text{if } 0 < t < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

फलन $f(t)$ का फुरिए रूपांतर ज्ञात करें।

$$f(t) = \begin{cases} 6 & \text{if } 0 < t < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(vi) "Total angular momentum and total linear momentum of a system of particles is zero in the centre of mass system." Is this statement true?

''कणों के निकाय के लिए कुल कोणीय संवेग एवं कुल रेखीय संवेग द्रव्यमान केन्द्र निकाय में शून्य होता है''। क्या यह कथन सत्य है?

(vii) Plot the Legendre polynomial $P_2(x)$ versus x.

लिगेंद्रे बहुपद $P_2(x)$ को x के साथ चित्रित (Plot) करो।

(viii) Evaluate the integral $\int_0^4 (e^x + 2)\,dx$ by Simpson's 1/3 rule

Here $h = 1$ and

x	0	1	2	3	4
$e^x + 2$	3	4.72	9.39	22.09	56.60

सिम्पसन के 1/3 के नियम से समाकल $\int_0^4 (e^x + 2)\,dx$ का मान ज्ञात करो यहाँ $h = 1$ व

x	0	1	2	3	4
$e^x + 2$	3	4.72	9.39	22.09	56.60

Section - B $4 \times 8 = 32$

(Short Answer Questions)

Note: Answer **any four** questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 8 marks.

खण्ड – ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।

2) Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule by dividing the interval [0, 1] into 6 equal parts.

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ नियम द्वारा अंतराल [0, 1] को बराबर 6 भागों में विभाजित कर ज्ञात करो।

3) Check that whether the transformation $Q = \left(\frac{3}{p^2} + 2\right), P = \left(\frac{qp^3}{6} + 6\right)$ is canonical or not.

यह जाँच करो की रूपांतरण $Q = \left(\frac{3}{p^2} + 2\right), P = \left(\frac{qp^3}{6} + 6\right)$ केनोनिकल (संयुग्मी) है अथवा नहीं है।

4) Using $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r! \lfloor n+r+1}$ find $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)]$

फलन $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r! \lfloor n+r+1}$ का उपयोग करते हुए $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)]$ ज्ञात करो।

5) Using Rodriguez's formula evaluate the value of the $\int_{-1}^{1} [\,2x^2\, P_4(x)\,]\, dx$

रोद्रिगुज (Rodiguez's) सूत्र का उपयोग करते हुए $\int_{-1}^{1} [\,2x^2\, P_4(x)\,]\, dx$ का मान ज्ञात करो।

6) Using Lagrangian equation find the time period of compound pendulum.

पिंड लोलक का आवर्तकाल लेंग्रंजियन समीकरण का उपयोग करते हुए ज्ञात करो।

7) Find the Fourier Cosine transform of $f(x) = \begin{cases} x & for \;\; 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1-x & for \;\; \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & for \;\; x > 1 \end{cases}$

फोरिएर कोज्या रूपान्तर ज्ञात करो यदि $f(x) = \begin{cases} x & for \;\; 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1-x & for \;\; \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & for \;\; x > 1 \end{cases}$

8) Find the Laplace transform of the function $f(t) = \frac{e^{ht} - 1}{h}$

Here h is constant.

निम्न फलन का लाप्सास रूपान्तर ज्ञात करो $f(t) = \frac{e^{ht} - 1}{h}$

यहाँ h अचर है।

9) Prove the $A_i B^i$ is invariant if A_i is covariant tensor and B^i is contravariant tensor.

यह सिद्ध कीजिए कि $A_i B^i$ निश्चर रहता है यदि A_i सहचर (कोवेरिंत) प्रदिश तथा B^i कोंट्रावेरियनट प्रदिश है।

Section - C $2 \times 16 = 32$

(Long Answer Questions)

Note: Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to 500 words. Each question carries 16 marks.

खण्ड – स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

10) (i) The velocity V(km/min) with respect to time t is shown in the table. Estimate the distance $\int_0^{20} V\,dt$ covered in 20 minutes using Simpson's 3/8 rule.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V	0	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

समय t के साथ वेग V(km/min) को टेबल में बताया गया है सिम्पसन के 3/8 के नियम से 20 मिनट में तय की गई दूरी $\int_0^{20} V\,dt$ ज्ञात करो–

(ii) Obtain the equation of motion for simple pendulum using Hamilton's equations. (8+8)

हेमिल्टन के समीकरणों की सहायता से सरल लोलक की गति का समीकरण प्राप्त करिए।

11) (i) Using Rodrigues formula for Legendre polynomial $P_n(x)$ Determine the final expression of following function.

$f(x) = 6P_1(x) + 4P_3(x)$

लिजेंद्रे बहुपद $P_n(x)$ के लिए रोद्रिगुएस सूत्र का उपयोग करते हुए निम्न फलन के लिए अंतिम व्यंजक ज्ञात करो। $f(x) = 6P_1(x) + 4P_3(x)$

(ii) A body is moving with kinetic energy $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + xy)$ and potential energy $ax^2 + by^2 + cz^2$. Find the Lagrange's equations of motion. Here m, a, b, c are constants.

एक वस्तु गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + xy)$ तथा स्थितिज ऊर्जा $ax^2 + by^2 + cz^2$के साथ गति कर रही है तो लेग्रेंज के गति के समीकरण ज्ञात करो। यहाँ m, a, b, c अचर है।

12) (i) Use second order Runge - Kutta method (midpoint method) to solve the ordinary differential equation $\frac{dy}{dx} = x + y$, with initial condition $y(0) = 2$ in steps of 0.1.

द्वितीय कोटि रुंगे कुटा (Runge - Kutta) (मध्य बिंदु) विधि द्वारा साधारण अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} = x + y$ हल करो। यहाँ 0.1 के पद में प्राम्भिक शर्त $y(0) = 2$ है।

(ii) A body is oscillating with kinetic energy $\frac{3}{4}M(r-a)^2\dot{\theta}^2$ and potential energy $-Mg(r-a)\cos\theta$. Here M, g, r and a are constant. Obtain the equation of motion for this body using Lagrangian and also obtain the period of small oscillations.

एक वस्तु गतिज ऊर्जा $\frac{3}{4}M(r-a)^2\dot{\theta}^2$ तथा स्थितिज उर्जा $-Mg(r-a)\cos\theta$ के साथ दोलन कर रही है; यहाँ M, g, r तथा a अचर है लेग्रंजियन का उपयोग करते हुए वस्तु का गति समीकरण प्राप्त करो तथा अल्प दोलनो के लिए आवर्तकाल ज्ञात करो।

13. (i) Express $H(x) = 5x^2 + 2x$ in terms of Hermite's polynomials $H_1(x)$ and $H_2(x)$

हर्मिट बहुपद को $H_1(x)$ तथा $H_2(x)$ के पदों में $H(x) = 5x^2 + 2x$ को व्यक्त कीजिए।

(ii) Find Laplace transform of $\sin^2 t$ and $e^{kt} \sin \omega t$

$\sin^2 t$ तथा $e^{kt} \sin \omega t$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात करिए।

———