

**MT-04**

June - Examination 2017

**B.A. / B.Sc. Pt. II Examination****Real Analysis & Matric Space****Paper - MT-04****Time : 3 Hours ]****[ Max. Marks :- 67**

**Note:** The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answer as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश :** यह प्रश्न पत्र 'अ' 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section - A****7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Questions)

**Note:** Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit may be thirty words.

**खण्ड - 'अ'**

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'ए' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न का 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द है।

- 1) (i) Define point-wise convergence of sequence of functions.  
फलनों की अनुक्रम का बिन्दुशः अभिसरण को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define the complete metric space.  
पूर्ण दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define the continuity of function of two variable at any point  $(x_0, y_0)$ .  
द्विचर फलन  $f(x, y)$  के किसी बिन्दु  $(x_0, y_0)$  पर सातत्य को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define connected spaces.  
सम्बद्ध समष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (v) What is the infimum of the set  $S = \{x: x^2 \leq 16, x \in I\}$ .  
समुच्चय  $S = \{x: x^2 \leq 16, x \in I\}$  का निम्नक बताइए।
- (vi) What is the point where the sequence  $\left\{ \frac{3 + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right\}$  converges?  
अनुक्रम  $\left\{ \frac{3 + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right\}$  किस बिन्दु को अभिसृत होती है?
- (vii) What is the limit point of the set  $A = \left\{ \frac{1}{n}: n \in N \right\}$   
समुच्चय  $A = \left\{ \frac{1}{n}: n \in N \right\}$  का सीमा बिन्दु बताइए।

## Section - B

4 × 8 = 32

## Short Answer Questions

**Note:** Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

## (खण्ड - ब)

## लघुत्तरात्मक प्रश्न

**निर्देश :** खण्ड 'बी' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) If  $p$  and  $q$  are rational and irrational numbers respectively then prove that  $p+q$  and  $pq$  are irrational numbers. Where  $p \neq 0$ .  
यदि  $p$  और  $q$  क्रमशः परिमेय तथा अपरिमेय संख्या हो, तो सिद्ध कीजिए कि  $p+q$  और  $pq$  अपरिमेय संख्या होती है। जहाँ  $p \neq 0$ ।

3) Prove that every compact subset of real numbers is closed and bounded.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक संहत उपसमुच्चय संवृत तथा परिबद्ध होता है।

4) Prove that if sequence  $\{x_n\}$  converges to  $l$  then sequence  $\{a_n\}$  also converges to  $l$ . Where  $a_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \forall n \in N$

यदि अनुक्रम  $\{x_n\}$ ,  $l$  को अभिसृत हो तो अनुक्रम  $\{a_n\}$  भी  $l$  को अभिसृत होगा।

जहाँ  $a_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \forall n \in N$  है।

- 5) State and prove Mostest's theorem for continuous function.

सतत फलनों के लिए मॉस्टेस्ट प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

- 6) Prove that if joint limit of function  $f(x, y)$  exists then it is unique.

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन  $f(x, y)$  की युगपत् सीमा का अस्तित्व है तो युगपत् सीमा अद्वितीय होती है।

- 7) State and prove fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

- 8) If  $(X, d)$  is a metric space and  $D$  define on  $X$  such that

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

Then prove that  $(X, D)$  is a metric space.

माना कि  $(X, d)$  एक दूरीक समष्टि है तथा  $D, X$  पर निम्न प्रकार परिभाषित है:

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

प्रदर्शित कीजिए कि  $(X, D)$  एक दूरीक समष्टि है।

- 9) Prove that limit of a convergence sequence in a metric space is unique.

सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में किसी अभिसारी अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है।

## Long Answer Questions

**Note:** Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (2) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

## (खण्ड - स)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

**निर्देश :** खण्ड 'सी' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) If  $\{x_n\}$  and  $\{y_n\}$  are two convergent sequences which converges to  $l$  and  $l'$  respectively then prove that

यदि  $\{x_n\}$  और  $\{y_n\}$  दो अभिसारी अनुक्रम हैं, जो क्रमशः  $l$  और  $l'$  को अभिसृत हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n + y_n\} = l + l'$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n - y_n\} = l - l'$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \cdot y_n\} = l \cdot l'$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \frac{l}{l'}; l' \neq 0, y_n \neq 0$$

11) Test the series  $\sum x^2(1-x^2)^{n-1}$  for uniform convergence and continuity of sum in interval  $|x| < 2$

श्रेणी  $\sum x^2(1-x^2)^{n-1}$  का एक समान अभिसारी होने का तथा योगफल के अन्तराल  $|x| < 2$  में सातत्य का परीक्षण कीजिए।

12) (i) Prove that every continuous function defined on interval  $[a, b]$  is Riemann integrable on interval  $[a, b]$ .

सिद्ध कीजिए कि अन्तराल  $[a, b]$  पर परिभाषित प्रत्येक सतत फलन  $[a, b]$  पर रीमान समाकलनीय होता है।

(ii) Prove that every monotonic function is Riemann integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है।

13) (i) Prove that every closed sphere in a metric space is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोला एक संवृत समुच्चय होता है।

(ii) Show that every infinite subset of a compact metric space has at least one limit point.

प्रदर्शित कीजिए कि संहत दूरीक समष्टि का प्रत्येक अनन्त उपसमुच्चय कम से कम एक सीमा बिन्दु रखता है।