MT-04

December - Examination 2019

B.A. / B.Sc. Pt. II Examination

Real Analysis & Metric Space

Paper - MT-04

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 47**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

Section - A $7 \times 1 = 7$

(Very Short Answer Type Questions)

Note: Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit my be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ए' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नो को हल करना हैं। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (a) Define denseness property of real numbers.

वास्तविक संख्याओंके सघनता गुणधर्म को परिभाषित कीजिये।

(b) Which type of discontinuity is present in the function and $f(x)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ \sin\frac{1}{x} ; & x\neq 0\end{cases}$ and why?

फलन $f(x)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ \sin\frac{1}{x} ; & x\neq 0\end{cases}$ में $x=0$ पर किस प्रकार का असांतत्य है व क्यों?

(c) Define divergent sequence.

अपसारी अनुक्रम को परिभाषित कीजिये।

(d) Define bounded set.

परिबद्ध समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

(e) Define point wise convergence of sequence of functions.

फलनों की अनुक्रम का बिन्दुशः अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

(f) State fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन कीजिये।

(g) Define the complete metric space.

पूर्ण दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिये।

Section - B **4 × 5 = 20**

(Short Answer Type Questions)

Note: Section 'B' contain Eight (08) Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 05 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड – ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'बी' में आठ (08) लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को कीन्ही भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 05 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

2) Prove that there are infinite rational numbers between any two different real numbers.

सिद्ध कीजिये कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओंके मध्य अनन्त परिमेय संख्याए विद्यमान होती है।

3) Prove that each compact subset of real numbers is closed and bounded.

सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक संहत उपसमुच्चय संवृत तथा परिबद्ध होता है।

4) Prove that every continuous function on closed interval is bounded in that interval.

सिद्ध कीजिये कि संवृत अन्तराल पर संतत् फलन, संवृत्त अन्तराल में परिवद्ध भी होता है।

5) Show that the function $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, x \in Q \\ 1-x, \ x \notin Q \end{cases}$ is not Riemann integrable on interval [0,1].

प्रदर्शित कीजिये कि फलन $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, x \in Q \\ 1-x, \ x \notin Q \end{cases}$ अन्तराल [0,1] पर रीमान समाकलनीय नहीं है।

6) Show that the sequence $< nxe^{-nx^2} >$ is point-wise convergent at the interval $[0, k], k > 0$ but is not uniformly convergent at that interval.
प्रदर्शित कीजिये कि अनुक्रम $< nxe^{-nx^2} >$ अन्तराल $[0, k], k > 0$ में बिन्दुशः अभिसारी है परन्तु एक समान रुप से अभिसारी नहीं है।

7) Find $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and $\bar{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ on set [0, 1] for metric $d(x, y) = |x - y|$

समुच्चय [0, 1] में दूरीक $d(x, y) = |x - y|$ के लिए $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ तथा $\bar{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ज्ञात कीजिये।

8) Prove that every open sphere in a metric space is an open set.
सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक विवृत गोला एक विवृत समुच्चय होता है।

9) Show that every infinite subset of a compact metric space has at least one limit point.
प्रदर्शित कीजिये कि संहत दूरीक समष्टि का प्रत्येक अनन्त उपसमुच्चय कम से कम एक सीमा बिन्दु रखता है।

Section - C **2 × 10 = 20**

(Long Answer Type Questions)

Note: Section 'C' contain 4 Long Anwser Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'सी' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को कीन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का हैं, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) (a) Prove that sequence $\{x_n\}$ is convergent and find its limit where

$$x_1 = x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n}, n \geq 1$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी है तथा इसकी सीमा ज्ञात कीजिए,

जहाँ $x_1 = x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n}, n \geq 1$

(b) Examine the continuity and differentiability of the function $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ in interval [0,3].

फलन $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ की अन्तराल [0,3] में सांतत्य तथा अवकलनीयता की जाँच कीजिये।

11) State and prove Cauchy's general principle of convergence and use it to prove that sequence $\{x_n\}$ is convergent where

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

कोशी के सामान्य अभिसरण सिद्धान्त को कथन कर सिद्ध कीजिए व इसका उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी है, जहाँ

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

12) (a) Prove that if simultaneous limit of functin $f(x,y)$ exists then it is unique.

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन $f(x,y)$ की युगपत सीमा का अस्तित्व है तो युगपत् सीमा अद्वितीय होती है।

(b) Prove that if functions f and g are Riemann integrable in closed interval [a,b] then fg also Riemann integrable on closed interval [a,b]

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन f तथा g संवृत्त अन्तराल [a,b] पर रीमान समाकलनीय हैं, तब fg भी [a,b] पर रीमान समाकलनीय होता है।

13) (a) Prove that (सिद्ध कीजिए कि) :

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$$

(b) If X and Y are metric spaces then prove that a mapping $f : X \to Y$ is continuous on X if and only if every open subset G in $Y, f^{-1}(G)$ is open in X.

यदि X और Y दूरीक समष्टियाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि एक प्रतिचित्रण $f : X \to Y, X$ पर संतत है यदि व केवल यदि Y के प्रत्येक विवृत उपसमुच्चय G के लिए $f^{-1}(G), X$ में विवृत है।