MT-04

December - Examination 2018

B.A. / B.Sc. Pt. II Examination

Real Analysis & Metric Space

Paper - MT-04

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answer as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A **$7 \times 1 = 7$**

(Contain seven (07) Very Short Answer Type Questions)

Note: Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न 01 अंक का है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Define cluster point of a set.
किसी समुच्चय के गुच्छ बिन्दु को परिभाषित कीजिये।

(ii) Define Constant sequence.
अचर अनुक्रम को परिभाषित कीजिये।

(iii) Define mixed discontinuity.
मिश्रित असांतत्य को परिभाषित कीजिये।

(iv) Define Norm of a partition.
विभाजन के मानक को परिभाषित कीजिये।

(v) State Cauchy's principle for uniform convergence of sequence of functions.
फलनों अनुक्रम के एक समान अभिसरण के लिए कॉशी का सिद्धान्त का कथन कीजिये।

(vi) State Dinni's theorem for sequence of functions.
फलनों के अनुक्रम के लिए डीनी प्रमेय का कथन कीजिये।

(vii) Define metric space.
दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिये।

Section - B $4 \times 8 = 32$

(Contain Eight Short Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any four (4) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

खण्ड – ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that every compact subset of set of real numbers is bounded and closed
सिद्ध कीजिये की वास्तविक संख्याओंके समुच्चय का प्रत्येक संहत उपसमुच्चय संवृत तथा परिबद्ध होता है।

3) State and prove Rolle's mean value theorem.
रोल मध्यमान प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

4) Prove that if simultaneous limit of function $f(x, y)$ exists then simultaneous limit is unique.
सिद्ध कीजिये की यदि फलन $f(x, y)$ की युगपत सीमा का अस्तित्व है तो युगपत् सीमा अद्वितीय होती है।

5) Show by using second mean value theorem on integration.
समाकलन की द्वितीय मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुये प्रदर्शित कीजिये की

$$\frac{\pi^3}{15} < \int_0^{\pi} \frac{x^2}{3 + 2\cos x}\, dx < \frac{\pi^3}{3}$$

6) Show that series $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ for all $0 < a \le x \le b < 2\pi$ is uniformly convergent.

प्रदर्शित कीजिये की श्रेणी $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ सभी $0 < a \le x \le b < 2\pi$ के लिए एक समान अभिसारी है।

7) If (X, d) is a metric space and D define on X such that

$$D(x, y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \qquad \forall x, y \in X$$

Then prove that (X, D) is a metric space.

माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा D, X पर निम्न प्रकार परिभाषित है:

$$D(x, y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \qquad \forall x, y \in X$$

प्रदर्शित कीजिये की (X, D) एक दूरीक समष्टि है।

8) Prove that limit of any convergent sequence of a metric space is unique.

सिद्ध कीजिए की दूरीक समष्टि में किसी अभिसारी अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है।

9) Show that every infinite subset of a compact metric space has at least one limit point.

प्रदर्शित कीजिये की संहत दूरीक समष्टि का प्रत्येक अनन्त उपसमुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु है।

Section - C $2 \times 14 = 28$

(Long Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to answer in maximum 500 words.

खण्ड – स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) If F is an ordered field and $a, b, c, \in F$ then prove that

यदि F एक क्रमित क्षेत्र हो, तथा $a, b, c, \in F$ हो, तो सिद्ध कीजिये की

(i) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

(ii) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

(iii) $a > b > \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(iv) $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + b > b + d$

(v) $a > b \wedge c > \Rightarrow a + b > 0 \wedge a \cdot b > 0$

(vi) $a^2 \geq 0$

(vii) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

11) State and prove Cauchy's General Principle of Convergence and use it to prove that following sequence is not convergent.

कोशी का सामान्य अभिसरण का सिद्धान्त का कथन कर सिद्ध कीजिये। तथा इसका उपयोग कर सिद्ध कीजिये कि दिया गया अनुक्रम अभिसारी नहीं है।

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.. + \frac{1}{n}$$

12) Examine series $\sum x^2 \left(1 - x^2\right)^{n-1}$ for uniform convergent and continuity of sum of function in interval $|x| < \sqrt{2}$.

श्रेणी $\sum x^2 \left(1 - x^2\right)^{n-1}$ का एक समान अभिसारी होने का तथा योगफलन के अन्तराल $|x| < \sqrt{2}$ में सांतत्य का परीक्षण कीजिये।

13) (i) Prove that in a metric space, every sphere is an open set.

सिद्ध कीजिए की किसी भी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक गोला एक विवृत समुच्चय होता है।

(ii) Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिए की एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोला एक संवृत समुच्चय होता है।
