

MT-04

December – Examination 2022

B.A./B.Sc. (Part II) Examination

MATHEMATICS

(Real Analysis and Metric Space)

Paper : MT-04

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 mark.

MT-04 / 7

(1)

TR-294 Turn Over

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define an ordered field.

क्रमित क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

(ii) State Bolzano-Weierstrass theorem.

बोलजानो-वीयरस्ट्रॉस प्रमेय का कथन लिखिए।

(iii) State Boundness theorem.

परिबद्धता प्रमेय का कथन लिखिए।

(iv) Define continuity of a function of two variables.

दो चरों के फलन की सांतत्यता को परिभाषित कीजिए।

(v) Define Refinement of a partition.

विभाजन के शोधन को परिभाषित कीजिए।

MT-04 / 7

(2)

TR-294

(vi) Define a sequence of functions.

फलनों के अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define a closed-set in metric space.

दूरीक समष्टि में सवृत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Section-B **4×5=20**

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Prove that the union of an arbitrary family of open set is an open.

सिद्ध कीजिए कि विवृत समुच्चयों के प्रत्येक समुदाय का संघ भी एक विवृत समुच्चय होता है।

3. Prove that every convergent sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

4. Show that the function $f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ is differentiable everywhere.

दर्शाएँ कि फलन $f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ सर्वत्र अवकलनीय है।

5. If $f(x) = x, x \in [0, 1]$, prove that :

$$f \in \mathbb{R} [0, 1] \text{ and } \int_0^1 f(x)dx = 1/2$$

यदि $f(x) = x, x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिए :

$$f \in \mathbb{R} [0, 1] \text{ एवं } \int_0^1 f(x)dx = 1/2$$

6. Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converges uniformly on \mathbb{R} .

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, \mathbb{R} में एकसमान अभिसारी है।

7. Find $S(1/2, 1)$ and $S(3/4, 1/2)$ for metric $d(x, y) = |x - y|$ in $[0, 1]$.

$[0, 1]$ में दूरीक $d(x, y) = |x - y|$ के लिए $S(1/2, 1)$ तथा $S[3/4, 1/2]$ ज्ञात कीजिए।

8. Prove that a subset A of a metric space X is closed if and only if $\bar{A} = A$.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि X का कोई उपसमुच्चय A संवृत होता है यदि और केवल यदि $\bar{A} = A$.

9. Prove that if a function f is continuous at the point $x = a$, then $|f|$ is also continuous at $x = a$ but not conversely.

सिद्ध कीजिए कि फलन f , एक बिन्दु $x = a$ पर संतत् है, तो फलन $|f|$ भी $x = a$ पर संतत् है किन्तु विलोम नहीं।

Section-C **2×10=20**

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

MT-04/7

(5)

TR-294 Turn Over

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. State and prove 'Mostest Theorem'.

'मॉस्टेस्ट प्रमेय' का कथन कर सिद्ध कीजिए।

11. If $f \in R[a, b]$, then prove that $|f| \in R[a, b]$ but the converse need not be true.

यदि $f \in R[a, b]$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $|f| \in R[a, b]$ किन्तु विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं होता है।

12. Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$ where :

(i) is monotonically increasing

(ii) is bounded

(iii) is convergent

(iv) $\lim x_n = 2/3$

MT-04/7

(6)

TR-294

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ जहाँ :

(i) एकदिष्ट वर्धमान है

(ii) परिबद्ध है

(iii) अभिसारी है

(iv) $\lim x_n = 2/3$

13. If (X, d) be a metric space, then prove that a subset A of X is closed iff its complement of A i.e. $A' = X - A$ is open in X .

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तो सिद्ध कीजिए कि X का उपसमुच्चय A , X में संवृत होता है यदि और केवल यदि A का एक पूरक समुच्चय $A' = X - A$, X में विवृत समुच्चय हो।