

MT-02

December - Examination 2017

B.A./B.Sc. Pt. I Examination**Calculus and Differential Equations****Paper - MT-02****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Type Questions)

Note: Section 'A' contain seven (07) very short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit is thirty words.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ए' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के लिए 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द है।

- 1) (i) Write Cauchy's n^{th} root test.
कोशी का n वाँ मूलपरीक्षण लिखिए।
- (ii) Calculate $\frac{ds}{d\theta}$ for the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.
वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ के लिए $\frac{ds}{d\theta}$ ज्ञात कीजिये।
- (iii) Define concavity.
अवतलता को परिभाषित कीजिए।
- (iv) State Pappus Theorem.
पेपस के प्रमेय का कथन कीजिए।
- (v) Write relation between Beta and Gamma functions.
बीटा व गामा फलन में सम्बन्ध लिखिए।
- (vi) Solve (हल कीजिए): $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$
- (vii) Write Maclaurin series expansion of e^x
 e^x का मेकलारिन श्रेणी प्रसार लिखिए।

Section - B

4 × 8 = 32

(Short Answer Type Questions)

Note: Section 'B' contain Eight (08) short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'बी' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

- 2) Find pedal equation for ellipse $\frac{1}{r} = e \cos \theta$, ($e < 1$).

दीर्घवृत्त $\frac{1}{r} = e \cos \theta$, ($e < 1$). का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

- 3) Prove that radius of curvature for the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ at point $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ is $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$.

सिद्ध कीजिये कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिन्दु $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$ होगी।

- 4) Show that minimum value of $u(x, y) = xy + a^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ is $3a^2$.

प्रदर्शित कीजिये कि फलन $u(x, y) = xy + a^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ का निम्निष्ठ मान $3a^2$ होगा।

- 5) Trace the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ का अनुरेखण कीजिये।

- 6) Prove that area between parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4by$ is $\frac{16}{3}ab$.

सिद्ध कीजिये की परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ के मध्य का क्षेत्रफल $\frac{16}{3}ab$ है।

- 7) Find volume of solid of revolution generated by revolving lemniscates $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ about line $\theta = \frac{\pi}{2}$

द्विपाशी (Lemniscates) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ से जनित ठोस आकृति का आयतन ज्ञात कीजिए जब यह रेखा $\theta = \frac{\pi}{2}$ के परितः परिक्रमण करता हो।

8) Find the value of $\iiint x^2 dx dy dz$ where area of integration is

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \leq 1$$

मान ज्ञात कीजिए $\iiint x^2 dx dy dz$

जहाँ समाकलन का क्षेत्र सम्पूर्ण दीर्घवृत्तज $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \leq 1$ है।

9) Find Lagrange's remainder and Cauchy remainder after expansion up to n terms of function $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$

निम्न फलनों के प्रसार में n पदों के पश्चात् लाग्रान्ज तथा कोशी शेष पद प्राप्त कीजिए: $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$

Section - C

2 × 14 = 28

(Long Answer Type Questions)

Note: Section 'C' contain 04 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'सी' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों के हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

- 10) (i) If $x = \zeta \cos \alpha - \eta \sin \alpha$ and $y = \zeta \sin \alpha + \eta \cos \alpha$ then prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$.

सिद्ध करो कि यदि $x = \zeta \cos \alpha - \eta \sin \alpha$ व $y = \zeta \sin \alpha + \eta \cos \alpha$ हों तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ जबकि α एक अचर राशि है।

- (ii) Find asymptotes of following curve.

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियों को ज्ञात कीजिए।

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

- 11) (i) Find envelope of ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ where $a + b = c$

दीर्घ वृत्तों $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जहाँ $a + b = c$

- (ii) Show that length of curve $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$ is $\pi a\sqrt{2}$

प्रदर्शित करिए कि वक्र $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$ की लम्बाई $\pi a\sqrt{2}$ है।

- 12) (i) Calculate following integral by changing into polar co-ordinates: निम्न समाकल को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

- (ii) Prove that सिद्ध करो कि $\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}$

- 13) (i) Solve (हल कीजिए):

$$(xy \sin xy + \cos xy) y dx + (xy \sin xy - \cos xy) x dy = 0.$$

- (ii) Examine the convergence of series $\frac{2}{1^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{4^3}{3^4}x^3 + \dots$

श्रेणी $\frac{2}{1^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{4^3}{3^4}x^3 + \dots$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।